0.1 May's Operad

『Operad』という言葉は元々J.P.May の本で使われたのが始まりとされる。
彼の定義では空間の列とある関係を満たす連続写像の組、対称群の作用などから構成されている。今では (symmetric) monoidal category 上で定義されるのが普通になってきた。

Definition 0.1.1

$(M, \otimes, I)$ を symmetric monoidal category とする。M 上の operad P とは、M の object の列 $\{P(n)\}_{n \geqq 1}$ と M の morphism の組

$$\gamma_{n;m_1,\cdots,m_n} : P(k) \otimes P(m_1) \otimes \cdots \otimes P(m_n) \longrightarrow P(m_1 + \cdots + m_n)$$

が与えられ、次の条件を満たすものである。

1. index がややこしいので以下のように置く。

$$\mathbf{m} = \Sigma_{1 \leqq i \leqq n} m_i \ , \ \mathbf{l} = \Sigma_{1 \leqq i \leqq \mathbf{m}} l_i$$

そして、

$$[\mathbf{m}] = (m_1, \cdots, m_n) \ , \ [\mathbf{l}] = (l_1, \cdots, l_{\mathbf{m}}) \ , \ [\mathbf{l_j}] = (\sigma_{0 \leqq i \leqq j-1} m_{i-1} + 1, \cdots \sigma_{0 \leqq i \leqq j} m_i)$$

さらに、$P[\mathbf{m}] = P(m_1) \otimes \cdots \otimes P(m_n)$ などとおくとき、次の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
P(n) \otimes P[\mathbf{m}] \otimes P[\mathbf{l}] \arrow[r, "p"'] \arrow[dd, "\gamma_{n,[\mathbf{m}]}"'] & P(n) \otimes (P(m_1) \otimes P([\mathbf{l_1}])) \otimes \cdots \otimes (P(m_n) \otimes P[l_n]) \arrow[d, "\gamma_{m_1,[l_1]} \otimes \cdots \otimes \gamma_{m_n,[l_n]}"'] \\
 & P(n) \otimes P(\mathbf{l_1}) \otimes \cdots \otimes P(\mathbf{l_n}) \arrow[d, "\gamma_{n;\mathbf{l_1},\cdots,\mathbf{l_n}}"'] \\
P(\mathbf{m}) \otimes P[\mathbf{l}] \arrow[r, "\gamma_{m,[\mathbf{l}]}"'] & P(\mathbf{l})
\end{tikzcd}$$

ただし、p は symmetric morphism を用いた入れ替えの morphism である。

2. $\eta : I \longrightarrow P(1)$ が存在し、次の diagram を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
P(n) \otimes I^{\otimes n} \arrow[r, "\eta^{\otimes n}"] \arrow[d, "\cong"'] & P(n) \otimes P(1) \otimes \cdots \otimes P(1) \arrow[d, "\gamma_{n;1,\cdots,1}"'] \\
P(n) \arrow[r, "="'] & P(n)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes P(n) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\cong"'] & P(1) \otimes P(n) \arrow[d, "\gamma_{1;n}"] \\
P(n) \arrow[r, "="'] & P(n)
\end{tikzcd}
$$

ただし、$\cong$ は monoidal category における unit morphism である。

3. 各 $P(n)$ は Σ_n-module、つまり $\Sigma_n \longrightarrow \mathrm{End}_M(P(n))$ が与えられているとする。$\sigma \in \Sigma_n$ と $[\mathbf{m}] = (m_1, \cdots, m_n)$ に対し、$\sigma[\mathbf{m}] = (m_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, m_{\sigma^{-1}(n)})$ とすると、symmetric morphism を用いて、

$$\overline{\sigma} : P[\mathbf{m}] \longrightarrow P[\sigma[\mathbf{m}]]$$

が定義される。このとき、

$$
\begin{tikzcd}
P(n) \otimes P[\mathbf{m}] \arrow[r, "\overline{\sigma}"] \arrow[dd, "\sigma"'] & P(n) \otimes P(\sigma[\mathbf{m}]) \arrow[d, "\gamma_{n;\sigma[\mathbf{m}]}"'] \\
 & P(\mathbf{m}) \arrow[d, "\sigma_{\mathbf{m}}"'] \\
P(n) \otimes P[\mathbf{m}] \arrow[r, "\gamma_{n;[\mathbf{m}]}"'] & P(\mathbf{m})
\end{tikzcd}
$$

ただし、$\sigma_{\mathbf{m}} \in \Sigma_{\mathbf{m}}$ は block permutation で、

$$\sigma_{\mathbf{m}}(1, 2, \cdots, \mathbf{m} = \Sigma m_j) = ([\mathbf{m}_{\sigma^{-1}(\mathbf{1})}], \cdots, [\mathbf{m}_{\sigma^{-1}(\mathbf{n})}])$$

1 の条件を associativity、2 の条件を unital、3 の条件を symmetric と呼ぶ。このとき、2 および 3 を除外して Operad を考えることもある。そのため、それぞれ、unital、non-unital、Σ、non-Σ operad と名前を分けて使うこともあるが、単に Operad といってしまう場合が多い。Operad は具体例を学んだほうが話は速いような気がする。以下では unital non-Σ operad の例を中心に考えているが、Σ-operad になるものもある。

Example 0.1.2 *Endmorphism operad*

M を closed symmetric monoidal category、つまり M は M 自身で enrich されているとする。このとき $X \in \mathrm{ob}(M)$ に対し、$\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, X)$ で定義し、

$$\gamma_{n;m_1,\cdots,m_n} : \mathrm{End}_X(n) \otimes \mathrm{End}_X(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_X(m_n) \xrightarrow{\otimes} \mathrm{End}_X(\mathbf{m})$$

を、

$$\mathrm{End}_X(n) \otimes \mathrm{End}_X(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_X(m_k) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, X) \otimes \mathrm{Hom}(X^{\otimes \mathbf{m}}, X^{\otimes n}) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}(X^{\otimes \mathbf{m}}, X) = \mathrm{End}_X(\mathbf{m})$$

により定義するとこれは operad になり、X の Endmorphism operad と呼ばれる。operad で最も重要な例である。また、$\mathrm{CoEnd}_X(n) = \mathrm{Hom}(X, X^{\otimes n})$ とおいても、composition を用いて operad を構成でき、Coendmorphism operad と呼ばれている。

Remmark 0.1.3

$(\mathbf{Space}, \times, *)$ における X の Endmorphism operad は、

$$\mathrm{End}_X(n) = \mathrm{Map}(X^n, X)$$

であり、

$$\gamma_{n;m_1,\cdots,m_n} : \mathrm{End}_X(n) \times \mathrm{End}_X(m_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_X(m_n) \longrightarrow \mathrm{End}_X(\mathbf{m})$$

は、

$$\gamma_{n;m_1,\cdots,m_n}(\alpha;\beta_1,\cdots,\beta_n)(x_1,\cdots,x_{\mathbf{m}}) = \alpha(\beta_1(x_1,\cdots,x_{m_1}),\cdots,\beta_{m_n}(x_{m_1+\cdots m_{n-1}+1},\cdots,x_{\mathbf{m}}))$$

となる。

Example 0.1.4 *Tree operad*

$(\mathbf{Set}, \times, *)$ において、$Tree(n) =$\{n-leaves planer looted binary trees\} とし、

$$Tree(n) \times Tree(m_1) \times \cdots \times Tree(m_n) \longrightarrow Tree(\mathbf{m})$$

を、Tree の合成により定義すると operad となり、これを Tree operad と呼ぶ。

Example 0.1.5 *Little n-cube operad*

$(\mathbf{Space}, \times, *)$ において $n > 0$ としたとき、$c = l_1 \times \cdots \cdots l_n : I^n \longrightarrow I^n$ を little n-cube とよぶ。ただし、各 $l_j : I \longrightarrow I$ は向きを保つ affinne map の埋め込みである。$C_n(1) = \{c : \text{little } n\text{-cube}\} \subset \mathrm{Map}(I^n, I^n)$ として空間と思う。このとき、

$$C_n(r) = \{(c_1,\cdots,c_r) \in C_n(1)^r \mid c_i(\mathrm{Int}(I^n)) \cap c_j(\mathrm{Int}(I^n)) = \phi \ \ (i \neq j)\ \}$$

とおき、

$$C_n(r) \times C_n(m_1) \times \cdots \times C_n(m_r) \longrightarrow C_n(\mathbf{m})$$

を、

$$(c_1,\cdots,c_r;c_{1,1},\cdots,c_{1,m_1};\cdots;c_{r,1},\cdots,c_{r,m_r}) \mapsto (c_1 \circ c_{1,1}, c_1 \circ c_{1,1},\cdots,c_r \circ c_{r,m_r})$$

により定義すれば operad となり、これを Little n-cube operad と呼ぶ。

Example 0.1.6 *Trivial operad*

$(\mathbf{Set}, \times, *)$ において、$*(1) = *$, $*(n) = \phi$ $(n > 1)$ とすれば、これは自明な operad となる。

Example 0.1.7 *Associative operad*

$(M, \otimes, I)$ を monoidal category とすると、$Ass(n) = I$ $(n \geqq 1)$ とすれば、unit morphism を用いてこれは operad となり、associative operad と呼ぶ。

Definition 0.1.8

$(M, \otimes, I)$ を symmetric monoidal category とし、P, Q を operad とする。$f : P \longrightarrow Q$ が operad 間の morphism とは、M の morphism

$$f_n : P(n) \longrightarrow Q(n) \quad (n \geqq 1)$$

で、各 structure map を可換にする。つまり、

$$\begin{tikzcd}
P(n) \otimes P(m_1) \otimes \cdots \otimes P(m_n) \arrow[r, "\gamma^P"] \arrow[d, "f_n \otimes f_{m_1} \otimes \cdots f_{m_n}"'] & P(\mathbf{m}) \arrow[d, "f_{\mathbf{m}}"] \\
Q(n) \otimes Q(m_1) \otimes \cdots \otimes Q(m_n) \arrow[r, "\gamma^Q"'] & Q(\mathbf{m})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "\eta^P"'] \arrow[dr, "\eta^Q"] & \\
P(1) \arrow[rr, "f_1"'] & & Q(1)
\end{tikzcd}$$

を可換にする morphism である。oprad の morphism は levelwise で合成が定義され、category をなす。M 上の operad の category を $Op(M)$ と書くことにする。